

# Vorlesung 7a

## Normalverteilung und Zentraler Grenzwertsatz

Teil 2:

Die Standardnormalverteilung auf  $\mathbb{R}^n$

(vgl. Buch S. 71)

In Teil 3 der Vorlesung 6b formulierten wir den  
**Satz über die Unabhängigkeit von ZV'en mit Dichten**

$X_1, \dots, X_n$  seien reellwertige Zufallsvariable,  
 $f_1, \dots, f_n$  seien Dichtefunktionen.

Dann sind äquivalent:

(i)  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig,  
und  $X_i$  hat die Dichte  $f_i(a_i) da_i, \quad i = 1, \dots, n.$

(ii)  $(X_1, \dots, X_n)$  hat die Dichte

$$f_1(a_1) \cdots f_n(a_n) da_1 \dots da_n$$

Dazu passt die folgende Situation:

Sei  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$ . Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$  sind unabhängig und  $N(0, 1)$ -verteilt

Dazu passt die folgende Situation:

Sei  $Z := (Z_1, \dots, Z_n)$ . Dann gilt:

$Z_1, \dots, Z_n$  sind unabhängig und  $N(0, 1)$ -verteilt

$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{P}(Z \in da) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{|a|^2}{2}\right) da, \quad a \in \mathbb{R}^n,$$

$$\text{mit } |a|^2 := a_1^2 + \dots + a_n^2.$$

$Z$  heißt dann standard-normalverteilt auf  $\mathbb{R}^n$ .

Die Dichte der Standard-Normalverteilung auf  $\mathbb{R}^n$   
ist rotationssymmetrisch.

Analog zum Fall  $n = 2$  gilt deshalb:

Ist  $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$  standard-normalverteilt auf  $\mathbb{R}^n$

dann ist  $Y := \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{n}}$   $N(0, 1)$ -verteilt.

Denn  $Y$  ist die Koordinate von  $\vec{Z} = Z_1\vec{e}_1 + \dots + Z_n\vec{e}_n$   
zum Einheitsvektor  $\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \dots, 1)$ .